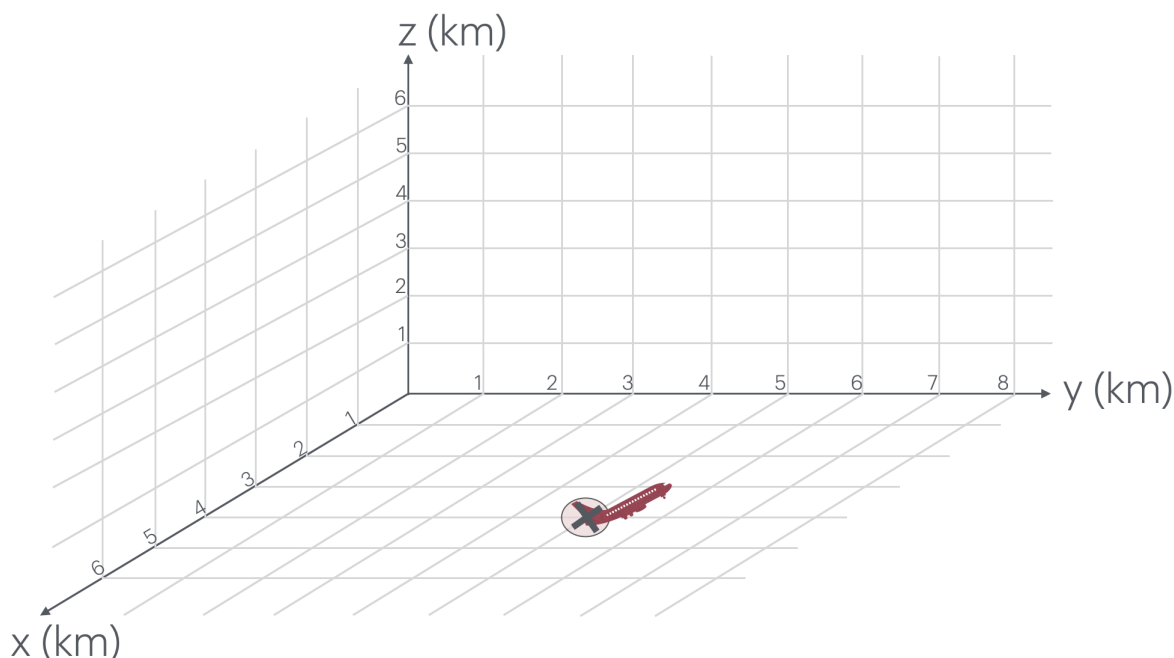


PAU25 - Mostra d'exercicis de caire competencial

1 Matemàtiques II - Geometria

Problema 1. Un avió es disposa a enlairar-se, des del punt marcat amb una creu sobre l'esbós, formant un angle amb el pla XY de 30° , en direcció el vector $\vec{v} = (1, a, b)$, amb $a, b > 0$ i durant una longitud de 5 Km .



- [P. mecànica] Calcula el vector $\vec{v}$ que indica la direcció i el mòdul de la trajectòria d'enlairament.
- [P. enraonament] En quin punt es troba l'avió després de l'enlairament.
- [P. enraonament] Calcula tots els plans ortogonals a la trajectòria de l'avió durant el seu enlairament.

Solució:

- Sabem que l'angle entre $\vec{v}$ i el pla XY és de $\alpha = 30^\circ$. A més, sabem que l'angle entre el vector $\vec{v}$ i el vector normal $\vec{n} = (A, B, C)$ al pla XY satisfà que

$$\cos(90 - \alpha) = \frac{Av_1 + Bv_2 + Cv_3}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}.$$

Al nostre cas, $\vec{n} = (0, 0, 1)$. Aleshores, imposant això i que volem que el seu mòdul sigui 5, tenim que:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \sqrt{1^2 + a^2 + b^2} = 5, \\ (2) \quad & \cos(60) = \frac{0 + 0 + b}{\sqrt{1^2 + a^2 + b^2}} = \frac{0 + 0 + b}{5} \rightarrow b = 5 \cos(60) = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ km}. \end{aligned}$$

Aleshores,

$$\sqrt{1 + a^2 + 25/4} = 5 \rightarrow 4a^2 + 29 = 100 \rightarrow a = \sqrt{\frac{71}{4}} = \frac{\sqrt{71}}{2} \approx 4,2131 \text{ km}.$$

Per tant, $\vec{v} = \left(1, \frac{\sqrt{71}}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

- Segui P el punt on es troba l'avió després de l'enlairament, i notem que l'avió es troba al punt $(4, 5, 0)$ just abans d'iniciar l'enlairament. Llavors tenim que

$$\vec{OP} = (4, 5, 0) + \left(1, \frac{\sqrt{71}}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(5, \frac{10 + \sqrt{71}}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

Notem que el vector sumat ja és el que tenia mòdul 5 km ja que ho havíem imposat així en l'apartat (a). Sinó s'hauria de modificar per complir aquesta condició.

Llavors el punt solució és el:

$$\left(5, \frac{10 + \sqrt{71}}{2}, \frac{5}{2}\right) \approx (5, 9.21, 2.5)$$

- c) El vector normal a aquests plans és el $\left(1, \frac{\sqrt{71}}{2}, \frac{5}{2}\right)$. Aleshores, l'equació dels plans ve donada per

$$x + \frac{\sqrt{71}}{2}y + \frac{5}{2}z + D = 0$$

on $D \in \mathbb{R}$.

Problema 2. La NASA es disposa a llançar una nau espacial des de la base que tenen a Cabo Cañaveral, Florida.

- a) [P. mecànica] Suposem que la nau viatja sempre en línia recta. Si es llança en direcció $\vec{d} = (2, 3, 6)$ i sabem que la Lluna es troba a 384.400 km de la Terra. Quines són les coordenades de la lluna respecte de la base localitzada a Cabo Cañaveral?
- b) [P. mecànica] Calcula el pla perpendicular a la trajectòria de la nau i que conté la Lluna.
- c) [P. mecànica] En lloc de llançar la nau directament cap a la Lluna, normalment es fa un primer llançament per ajustar la trajectòria i tot seguit es reajusta la trajectòria cap al destí desitjat. Si, partint des de la base, el primer llançament es fa en direcció $\vec{d}_{inicial} = (1, 1, 2)$, quina és la direcció que han de posar en el reajustament per tal d'arribar a la Lluna amb aquesta segona trajectòria?
- d) [P. enraonament] Calcula la intersecció de la recta que passa per la Lluna i té vector director $(2, 3, 6)$, amb el pla $z = 0$.

Solució:

- a) Sigui $O = (0, 0, 0)$ el punt on es troba la base de Cabo Cañaveral (ja que ens demanen la posició de la Lluna respecte d'aquest, llavors la posició de la Lluna L ve donada pel vector $\vec{OL}$, el qual resulta ser el vector $\vec{d} = (2, 3, 6)$ però amb mòdul 384.400 km . Llavors hem d'ajustar el mòdul del vector tal que:

$$\vec{OL} = (2, 3, 6) \cdot \frac{384.400}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} = (2, 3, 6) \cdot \frac{384.400}{7} = \left(\frac{768.800}{7}, \frac{1.153.200}{7}, \frac{2.306.400}{7}\right) \text{ km}.$$

- b) El vector normal del pla que cercam és el propi vector $(2, 3, 6)$ i volem que contengui L . Aleshores, el pla π que cercam és el $\pi : 2x + 3y + 6z + D = 0$ tal que D satisfà

$$2\frac{768.800}{7} + 3\frac{1.153.200}{7} + 6\frac{2.306.400}{7} + D = 0 \quad \rightarrow \quad 2 \cdot 768.800 + 3 \cdot 1.153.200 + 6 \cdot 2.306.400 + 7D = 0,$$

de on tenim que $D = -\frac{18.835.600}{7} = -2.690.800$ i per tant, el pla ve donat per

$$\pi : 2x + 3y + 6z - 2.690.800 = 0$$

- c) Cercam un vector director (x, y, z) tal que $(1, 1, 2) + (x, y, z) = (2, 3, 6)$. Aleshores,

$$(x + 1, y + 1, z + 2) = (2, 3, 6) \quad \rightarrow \quad (x, y, z) = (1, 2, 4).$$

- d) Notem que no cal fer cap càlcul. El pla $z = 0$ conté l'origen $(0, 0, 0)$, que és on es troba la base de la nau. Per construcció, aquest punt pertany a la recta mencionada. Llavors és el punt d'intersecció.

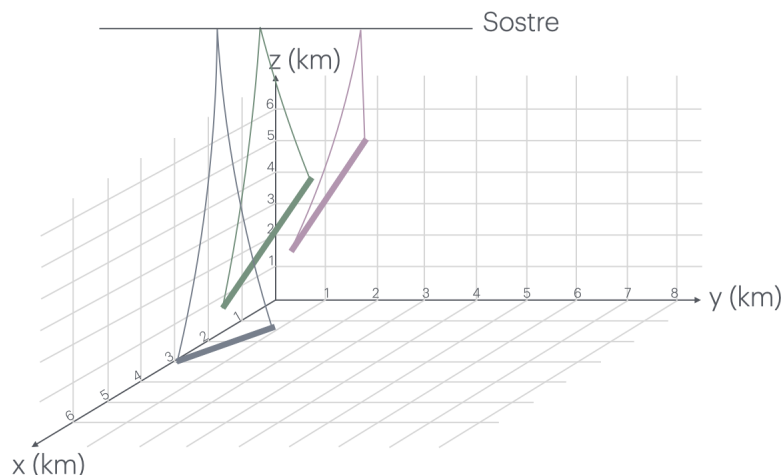
Problema 3. Un Ocell es troba sobre el punt més alt de la Catedral de Palma i es disposa a volar fins a un arbre que es troba als seus voltants passant, però, abans, per beure al brollador d'aigua que se troba situat dins del llac.

- a) [P. procedimental] Indica com calcularies la mínima distància del recorregut.
- b) [P. mecànica] Sabent que les localitzacions de la catedral, arbre i brollador són, segons un cert sistema de referència ortonormal, $(1, 2, -1)$, $(2, 1, 1)$ i $(1, 1, 1)$, aplica l'algoritme descrit a l'apartat anterior per calcular la mínima distància del recorregut.
- c) [P. enraonament] Un cop ha arribat a l'arbre, l'ocell cerca un nou destí de tal manera que la trajectòria "Catedral - brollador - arbre - nou punt - Catedral" formi un quadrat. És possible? En cas afirmatiu, troba'l. En cas negatiu, justifica per què no.

Solució:

- a) Sigui $C \in \mathbb{R}^3$ el punt més alt de la catedral, $A \in \mathbb{R}^3$ la localització de l'arbre destí i $B \in \mathbb{R}^3$ el punt on es troba el brollador. Llavors, el procediment a seguir vé donat per les passes (algoritme) següents:
1. Calculam $dist(C, B) = |\vec{CB}|$.
 2. Calculam $dist(B, A) = |\vec{BA}|$.
 3. Sumam ambdós resultats.
- b) $|\vec{CB}| = |(1, -1, 2)| = \sqrt{4} = 2$
 $|\vec{BA}| = |(-1, 0, 0)| = \sqrt{1} = 1$
 $dist = |\vec{CB}| + |\vec{BA}| = 2 + 1 = 3$.
- c) No ja que $|\vec{CB}| \neq |\vec{BA}|$.

Problema 4. [P. enraonament] En Joan ha col·locat 3 estants que pengen del sostre tal que el primer segueix la direcció $(1, 2, 5)$, el segon $(3, 2, 1)$ i el tercer $(5, 6, 11)$. Sense tenir més informació, discuteix raonadament si es podria donar el cas en què els estants es toquin en algun punt. En cas afirmatiu, proporciona 3 possibles direccions (una per cada estant) que assegurin que mai es tocan.



Solució: Volem veure si existeix interacció entre els 3 estants. Algunes idees que es poden tenir en compte serien:

- No ens donen la longitud dels estants, llavors en principi podem suposar que són tan llargs com volguem.
- Si els tres vectors són coplanaris, llavors podem tenir dues situacions: (1) si són paral·lels entre ells, no es tallaran; (2) si no són paral·lels entre ells, llavors si es tallaran.
- Si els tres vectors no són coplanaris, hem de mirar si un dels vectors es paral·lel al pla que formen els altres dos. En tal cas, no es tallaran.
- Si dues direccions són paral·leles, llavors aquells dos estants segur que no es tocan.

Vegem que compleixen els vectors. Sigui

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 11 \end{pmatrix}.$$

Notem que $\det(A) = 0$ i $\text{Rang}(A) = 2$, llavors els 3 vectors són coplanaris (es troben en un mateix pla), una direcció és combinació lineal de les altres dues i dos vectors són linealment independents però no els 3, amb la qual cosa les trajectòries es podrien tocar i conseqüentment existeix perill d'intersecció.

Proporcionem 3 direccions que assegurin que no es tallin. Aquestes basta que siguin coplanaris i paral·leles entre elles. Per exemple $(1, 0, 1)$, $(1, 0, 2)$, $(1, 0, 3)$. En aquest casm sigui

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

tenim que $\det(A) = 0$ i $\text{Rang}(A) = 1$, amb la qual cosa tenim que les 3 trajectòries estan sobre un mateix pla i els 3 vectors son linealment dependents (paral·lels). Llavors les trajectòries segur que no es tallen.