

La prova consta de cinc preguntes: les tres primeres obligatòries, i a la quarta i cinquena es pot triar entre dues opcions. En cas de contestar dos problemes d'una mateixa part, només s'avaluarà el primer. Vegeu la puntuació a cada exercici.

Justifiqui les respostes usant llenguatge matemàtic i/o no matemàtic, segons correspongui. Es permet utilitzar calculadora científica bàsica, però NO es permet l'ús de calculadores gràfiques ni programables, ni de dispositius que puguin transmetre o emmagatzemar informació. Es poden usar regles i bolígrafs de colors (excepte vermell i verd).

Part A. (preguntes 1, 2 i 3). Contestau TOTES les preguntes d'aquesta part.

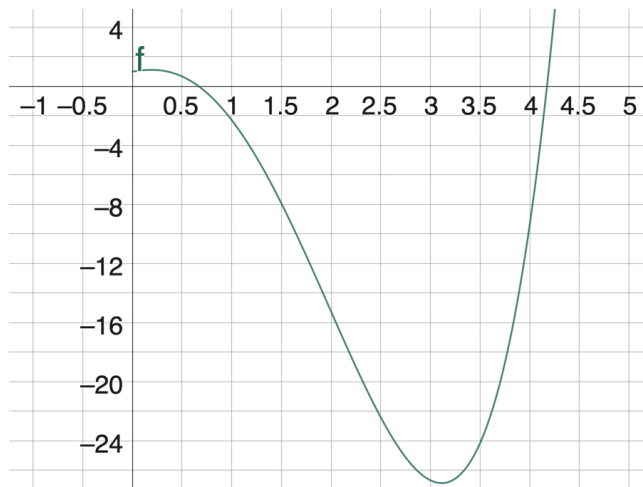
Problema 1. — En un estudi d'astronomia, es modelitza una constel·lació artificial formada per satèl·lits que orbiten al voltant de la Terra. Considerant el nostre sistema de coordenades amb origen en el centre de la Terra (on les unitats representen desenes de milers de quilòmetres), se situen 5 satèl·lits, A, B, C, D i E , amb coordenades

$$A(1,2,3), \quad B(3,2,1), \quad C(5,4,3), \quad D(2,1,1), \quad E(4,3,1).$$

Es diu que diferents satèl·lits formen un pla orbital si aquests, juntament amb el centre de la Terra, són coplanaris.

- (a) [1 punt] Determina si els satèl·lits A, B i C formen un pla orbital.
- (b) [1 punt] Proporciona un punt F (diferent de l'origen) on es podria col·locar un sisè satèl·lit per assegurar que els satèl·lits D, E i F formen un altre pla orbital.

Problema 2. — Donada la funció $f(x) = \frac{x^4 - 6x^3 + e^x \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, que té la representació gràfica següent:



- (a) [1 punt] Calcula els límits de la funció en els extrems del seu domini.
- (b) [1 punt] Calcula l'àrea compresa entre $f(x)$, $y = -1$, $x = 2$ i $x = 4$.

Problema 3. — En un institut de 60 alumnes s'ha realitzat un estudi sobre la pràctica del bàsquet entre l'alumnat. Les dades recollides indiquen que el 60 % d'aquests juguen a bàsquet, el 35 % formen part d'un equip federat i el 25 % juguen a bàsquet i estan federats.

- (a) [1 punt] Hi ha algun alumne que estigui federat, però no jugui a bàsquet? En cas afirmatiu, quants?
- (b) [1 punt] Quina és la probabilitat que un alumne formi part d'un equip federat sabent que juga a bàsquet?

Part B. (preguntes 4 i 5).

Problema 4. — Contestau només UNA de les següents preguntes (P4.1 o P4.2)

P4.1 Donada la funció $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x + 2}$,

- (a) [1.25 punts] Demuestra que $f(x)$ té almenys un punt crític en cada un dels següents intervals: $(-3, -2.5)$, $(-1, 0)$, i $(0, 1)$.
- (b) [0.75 punts] Sabent que $f(x)$ té exactament 3 punts crítics, un en cada interval de l'apartat anterior, indica si són màxims, mínims o punts d'inflexió.

P4.2 Un equip d'investigadors estudia la distància recorreguda per un dofí des del punt on ha estat alliberat dins una reserva marina. La distància recorreguda al cap de t segons ve donada per la funció

$$d(t) = 140(1 - e^{-0.05t}),$$

on $t \geq 0$ i $d(t)$ és la distància recorreguda en metres. Sigui $d'(t)$ la velocitat, en m/s, en l'instant t .

- (a) [0.5 punts] Calcula a quin valor tendeix la distància recorreguda pel dofí al llarg del temps.
- (b) [1.5 punts] Estudia el comportament de la velocitat del dofí, indicant en quins moments augmenta o disminueix, així com quines són les velocitats mínima i la màxima observades en aquest estudi.

Problema 5. — Contestau només UNA de les següents preguntes (P5.1 o P5.2)

P5.1 [2 punts] Siguin A , B , C i D quatre matrius de dimensió 2×3 , 1×3 , 2×3 , i 2×3 respectivament. Indica, justificadament, si es poden realitzar les següents operacions:

- (i) AC ,
- (ii) $D^{-1}A$,
- (iii) $B(A + C)^{\top}$,

on el superíndex $^{\top}$ indica la matriu transposada i el superíndex $^{-1}$ indica la matriu inversa. En cas afirmatiu digues quina és la dimensió de la matriu resultant.

P5.2 [2 punts] Volem determinar el cost horari de tres serveis que ofereix una empresa de lloguer de material audiovisual. Aquests serveis són: il·luminació professional, amb un cost de x €/hora; equip de so, amb un cost de y €/hora; càmeres de gravació, amb un cost de z €/hora. S'han registrat les despeses totals associades a tres esdeveniments diferents:

$$\text{Esdeveniment 1: } 2x + y + z = 6500,$$

$$\text{Esdeveniment 2: } 4x + 5y + 7z = 22500,$$

$$\text{Esdeveniment 3: } x + 2y + 3z = 8000.$$

Justifica si, amb la informació proporcionada, es poden determinar de manera única els costos dels tres serveis.