

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les vuit proposades. Justificau les respostes usant llenguatge matemàtic i/o no matemàtic, segons correspongui. Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4.

Es permet utilitzar calculadora científica bàsica. No es permet l'ús de calculadores gràfiques ni programables, ni de dispositius que puguin transmetre o emmagatzemar informació.

P1. — Una empresa està considerant la fabricació de tres tipus d'armaris diferents, A , B i C . Disposa de metall i fusta.

- Per fabricar cada unitat del model A , es requereixen 5 kg de metall i 5 hores de treball d'un operari (no es requereix fusta).
 - Per unitat del model B , 10 kg de metall, 10 kg de fusta i 10 hores de treball.
 - Per unitat del model C , 15 kg de metall i 5 hores de treball (no es requereix fusta).
- a) Si volem produir 10 unitats de cada tipus, quants de kg de cada material necessitam? **(2 pt)**
- b) Si disposam de 1550 kg de metall, 600 kg de fusta i 1050 hores de treball d'operaris, quantes unitats de cada tipus hem de fabricar per utilitzar completament tots els recursos? **(4 pt)**
- c) Suposem ara que disposam de 1550 kg de metall, tota la fusta que necessitam (sense límit) i 1050 hores de treball, però per limitacions del magatzem només podem produir 125 unitats en total. En aquest cas, podem utilitzar completament el metall, les hores i el magatzem? **(4 pt)**

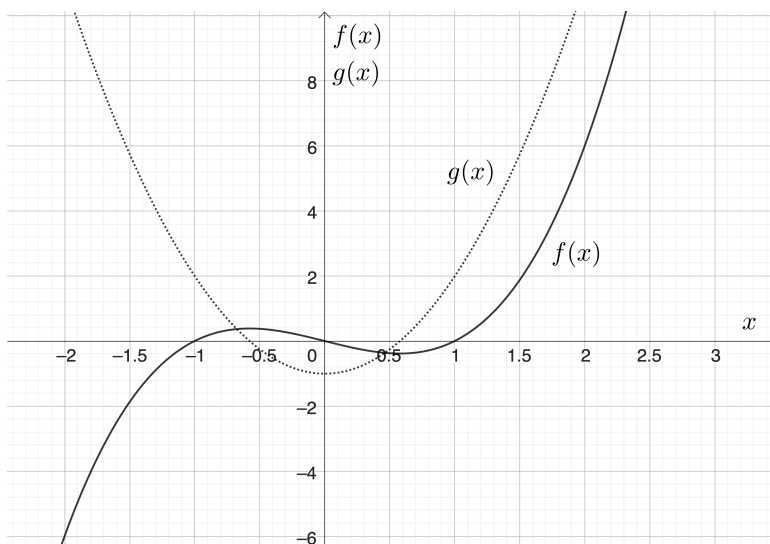
P2. — Un client ens demana ajuda per invertir un màxim de 10 000 € en dos productes d'inversió diferents: accions i bons. El client vol invertir almenys la mateixa quantitat en accions que en bons. A més, vol invertir entre 2 000 € i 8 000 € en bons; i entre 4 000 € i 6 000 € en accions. L'interès previst per a les accions és d'un 6% anual, mentre que per als bons és d'un 2% anual.

- a) Planteja la maximització de l'interès previst per les inversions com un problema de programació lineal. **(3 pt)**
- b) Dibuixa la regió factible, indicant les rectes i vèrtexs que la delimiten. **(5 pt)**
- c) Quina hauria de ser la inversió en cada tipus de producte per maximitzar l'interès anual previst? Quants de doblers es generarien amb aquesta inversió? **(2 pt)**

P3. — Considera la funció $f(x) = \sqrt{x}$.

- a) Fes una gràfica esquemàtica de la funció $f(x)$ i indica'n el domini, el comportament en els extrems del domini, els intervals de creixement i decreixement, i els màxims i mínims locals.
Indicació: per facilitar l'apartat b), l'eix horitzontal hauria d'arribar fins a $x = 30$. **(7 pt)**
- b) Traça, sobre la gràfica, la recta tangent a $f(x)$ al punt $x = 25$ i indica'n el pendent. **(3 pt)**

P4. — Considera dues funcions, $f(x)$ i $g(x)$, que estan representades a la gràfica següent:



- Sabem que una de les funcions és $x(x-1)(x+1)$ i que l'altra és $(x-1/\sqrt{3})(x+1/\sqrt{3})$, però no sabem quina és quina. Dedueix, partint de la gràfica, quina és $f(x)$ i quina és $g(x)$. Justifica la resposta. **(3 pt)**
- Sabem que una d'elles és la derivada de l'altra. Digues quina és quina: és $f(x) = g'(x)$? o bé és $g(x) = f'(x)$? **(3 pt)**
- Calcula l'àrea entre la funció $g(x)$ i l'eix d'abscisses, que es troba compresa entre els punts en què $g(x) = 0$. **(4 pt)**

P5. — Segons un model, la població d'una determinada ciutat, p (en milions d'habitants), depèn del temps que ha passat, t (en anys), des del començament de l'any 2000, segons la relació

$$p(t) = \frac{4}{1 + 3 \cdot e^{-0.2t}}, \quad \text{per a } t \geq 0.$$

Et proporcionam la següent informació, que pots utilitzar si ho consideres oportú:

$$p'(t) = \frac{2.4 \cdot e^{-0.2t}}{(1 + 3 \cdot e^{-0.2t})^2}, \quad \int p(t) dt = 20 \cdot \ln(e^{0.2t} + 3) + C, \quad \text{per a qualsevol constant } C \in \mathbb{R}.$$

- Quina població teníem al començament de l'any 2000 (és a dir, per a $t = 0$)? Quin any vàrem tenir exactament 2 milions d'habitants? **(3 pt)**
- En quins intervals la població augmenta? En quins disminueix? **(3 pt)**
- A què tendeix la població de la ciutat a llarg termini? A què tendeix el ritme de creixement de la població a llarg termini? **(4 pt)**

P6. — En una població,

- el 50% d'habitants amb major poder adquisitiu tenen una probabilitat de viure de lloguer d'un 10%, i
- el 50% d'habitants amb menor poder adquisitiu tenen una probabilitat de viure de lloguer d'un 40%.

- a) Quina és la probabilitat que, escollint un habitant a l'atzar, aquest visqui de lloguer? **(4 pt)**
- b) Quina és la probabilitat que, escollint de manera independent tres habitants a l'atzar, tots tres visquin de lloguer? **(3 pt)**
- c) Quina és la probabilitat que, escollint de manera independent tres habitants a l'atzar, almenys un dels tres visqui de lloguer? **(3 pt)**

P7. — La probabilitat que plogui un dia qualsevol és sempre la mateixa. Ara bé, si un dia qualsevol ha plogut, la probabilitat que plogui el dia següent és del 40%; i si un dia qualsevol no ha plogut, la probabilitat que plogui el dia següent és del 5%.

Considera els esdeveniments següents:

- A : Avui ha plogut.
- B : Demà plourà.

- a) Calcula $P(A)$ i $P(B)$. **(5 pt)**
- b) Què és més probable: que plogui demà si sabem que ha plogut avui; o bé que plogui avui si sabem que demà segur que plourà? **(5 pt)**

P8. — Segons l'Institut Nacional d'Estadística (INE), l'esperança de vida d'una persona nascuda el 2020 és de 79.6 anys per als homes i de 83.6 anys per a les dones. Suposem també que el nombre d'anys que viurà una persona nascuda el 2020 té una desviació típica de $\sigma = 10$ anys tant per als homes com per a les dones.

- a) Quina és la probabilitat que un home nascut el 2020 visqui més de 60 anys? I que visqui entre 60 i 70 anys? **(6 pt)**
- b) Què és més probable: que un home nascut el 2020 visqui més de 89.6 anys; o que una dona nascuda el 2020 visqui més de 93.6 anys? **(4 pt)**

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $\mathcal{N}(0,1)$.