

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les vuit proposades. Justificau les respostes usant llenguatge matemàtic i/o no matemàtic, segons correspongui. Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4.

Es permet utilitzar calculadora científica bàsica. No es permet l'ús de calculadores gràfiques ni programables, ni de dispositius que puguin transmetre o emmagatzemar informació.

P1. — Tens un petit negoci que ven pantalons i camises. El preu de cada pantaló és de 60 €, i el preu de cada camisa és de 40 €.

- a) Aquesta setmana s'han venut un total de 100 unitats entre pantalons i camises, i hem tingut uns ingressos totals de 5400 €. Quants pantalons i quantes camises hem venut? **(5 pt)**
- b) Fa tres setmanes es varen vendre un total de 110 unitats entre pantalons i camises, i un empleat que va revisar la caixa va dir que els ingressos totals eren de 4200 €... però tu no creus l'empleat. Quants pantalons i quantes camises s'haurien d'haver venut segons el que diu l'empleat? Interpreta el resultat obtingut. **(5 pt)**

P2. — Considera les matrius següents:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} y & z \\ 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

- a) Sabem que existeix un valor x tal que B és la inversa de A . Quin és aquest valor x ? **(3 pt)**
- b) Per al valor x de l'apartat anterior, calcula $(A + I)(B - I) + (A - I)(B + I)$. **(4 pt)**
- c) Existeixen alguns valors per a y, z de manera que C sigui la inversa de A ? **(3 pt)**

P3. — Una empresa produeix dos tipus de productes: aspiradores i bateries elèctriques.

- Per produir una aspiradora, necessitam 5 h d'un operari i 4 kg de matèries primeres.
- Per produir una bateria, necessitam 1 h d'un operari i 1 kg de matèries primeres.

Cada aspiradora es ven per 100 €, i cada bateria, per 22 €. Disposam d'un màxim de 110 hores d'operari i de 100 kg de matèries primeres. Suposarem que vendrem tota la producció.

- a) Quantes unitats de cada tipus hem de produir per maximitzar els ingressos? **(8 pt)**
- b) Si el preu de venda de les aspiradores va disminuint, hi haurà un moment en què serà més rendible fabricar només bateries. Calcula quin és el preu de venda que han de tenir les aspiradores, de manera que el màxim benefici total es dona quan només produïm bateries. **(2 pt)**

P4. — Considera la funció $f(x) = e^x - e^{-x}$, per a $x \geq 0$.

- a) Calcula el valor de la funció en els extrems del domini. (3 pt)
- b) Calcula $f'(x)$ i $f''(x)$. (4 pt)
- c) Calcula $\int_0^1 f(x) dx$. (3 pt)

P5. — Segons un estudi de mercat, la quantitat de gent que assistirà a un espectacle, g (en nombre de persones), en funció del preu de l'entrada, p (en €), serà la següent:

$$g(p) = \begin{cases} 500, & \text{per a } p = 0, \\ 300 - 3p, & \text{per a } 0 < p < 100, \\ 0, & \text{per a } p = 100. \end{cases}$$

- a) Quin és el domini de $g(p)$? És aquesta funció contínua? (3 pt)
- b) Segons l'estudi de mercat, si hi assisteixen 240 persones, quin haurà estat el preu de l'entrada? (2 pt)
- c) Els ingressos són el producte del preu per la quantitat de gent que hi assistirà. Segons l'estudi, quin preu maximitza els ingressos? (5 pt)

P6. — Un estudi de mercat indica que uns clients determinats tenen un 7% de probabilitats de comprar un producte A , i un 10% de probabilitats de comprar un producte B .

- a) Si la probabilitat de “comprar A i no comprar B ” és d'un 6%, són els esdeveniments “comprar A ” i “comprar B ” independents? (5 pt)
- b) Si els esdeveniments “comprar A ” i “comprar B ” fossin independents, què seria major: la probabilitat de “no comprar A ”; o la probabilitat de “no comprar A , sabent que s'ha comprat B ”? (5 pt)



P7. — Segons les dades de l'Institut Nacional d'Estadística (INE), l'1 de gener de 2023, a les Illes Balears hi havia 1 210 000 habitants en total. A més, el nombre d'habitatges, en funció del nombre d'habitants que hi conviven, eren els següents:

	Nombre de convivents			
	1	2	3	4 o més
Nombre d'habitatges	118 000	124 000	93 000	119 000

- a) Quin és el nombre mitjà de convivents per habitatge? (2 pt)
- b) Quants habitants pertanyen a un habitatge en el qual hi ha 4 o més convivents? Quin és el nombre mitjà de convivents en els habitatges en els quals hi ha 4 o més convivents? (2 pt)
- c) Escollint un habitant a l'atzar, quina és la probabilitat que visqui en un habitatge unipersonal? Justifica la teva resposta. (3 pt)
- d) Escollint, de manera independent, dos habitants a l'atzar, quina és la probabilitat que algun d'ells visqui en un habitatge unipersonal? Justifica la teva resposta. (3 pt)

P8. — Una empresa que fabrica components electrònics realitza un estudi sobre la vida útil dels seus productes. Amb una mostra aleatòria de 50 components electrònics, el temps mitjà de vida útil és de 507 hores. Suposem que el temps de vida útil segueix una distribució normal i que la seva desviació típica és coneguda i igual a 150 hores.

- a) Calcula un interval de confiança per a la mitjana poblacional de la vida útil dels components amb un nivell de confiança del 75%. (5 pt)
- b) Suposant ara que la mitjana poblacional és de $\mu = 500$ hores, quantes hores de vida útil tenen el 10% de productes que menys vida útil tenen? (5 pt)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $\mathcal{N}(0,1)$.