

Criteris de correcció globals

- Heu de corregir quatre qüestions en total d'entre les vuit proposades. Si l'alumne presenta més de quatre qüestions, corregiu-ne les quatre primeres.
- Cada problema té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions màximes que apareixen a cada apartat (si no està indicat, tots els apartats d'una mateixa pregunta tenen la mateixa valoració). Les puntuacions dels apartats són independents: si l'alumne s'ha equivocat en qualche apartat, però fa bé els altres (segons les "seves" dades equivocades), donau-li la puntuació adient.
- Es valorarà conjuntament el resultat, la justificació (ja sigui simbòlica o escrita), la claredat i ús del llenguatge matemàtic i no matemàtic, i l'estructura de la resposta. Orientativament, penalitzau:
 - Els errors de càlcul, amb un 25%; els errors greus i/o que portin a resultats incoherents o absurds, amb un 50%.
 - En preguntes mecàniques o de càlcul no justificades, amb el 30%-50%; en preguntes de justificar, una resposta sense cap justificació s'ha de penalitzar amb el 100%.
 - En qualsevol pregunta, si apareixen raonaments (que no són clars/evidents) sense justificar, amb el 20%-30%.
 - La imprecisió en l'ús del llenguatge matemàtic (p. ex. variables sense introduir/que canvien de significat), o la falta de claredat per absència de llenguatge matemàtic, amb un 20%-30%.
 - L'estructura s'ha de penalitzar en funció de la dificultat per entendre la resposta.
- Hi pot haver casos en què hi hagi dubtes en aplicar els criteris generals o específics. En aquests casos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

Criteris de correcció específics

Només es detallen els apartats en què hi ha diverses preguntes o que es poden desglossar. En apartats on s'omet el criteri de correcció específic, aquest serà simplement "Càlcul i/o justificació correcta".

P1. — Una empresa està considerant la fabricació de tres tipus d'armaris diferents, A , B i C . Disposa de metall i fusta.

- Per fabricar cada unitat del model A , es requereixen 5 kg de metall i 5 hores de treball d'un operari (no es requereix fusta).
- Per unitat del model B , 10 kg de metall, 10 kg de fusta i 10 hores de treball.
- Per unitat del model C , 15 kg de metall i 5 hores de treball (no es requereix fusta).

a) Si volem produir 10 unitats de cada tipus, quants de kg de cada material necessitam?
(Total 2 pt)

b) Si disposam de 1550 kg de metall, 600 kg de fusta i 1050 hores de treball d'operaris, quantes unitats de cada tipus hem de fabricar per utilitzar completament tots els recursos?

Criteris: 2 pt per plantejar, 2 pt per resoldre. Penalització amb -0.25 pt si no queda clar quina és cada variable.
(Total 4 pt)

c) Suposem ara que disposam de 1550 kg de metall, tota la fusta que necessitam (sense límit) i 1050 hores de treball, però per limitacions del magatzem només podem produir 125 unitats en total. En aquest cas, podem utilitzar completament el metall, les hores i el magatzem?

Criteris: 2 pt per plantejar, 2 pt per resoldre.
(Total 4 pt)

P2. — Un client ens demana ajuda per invertir un màxim de 10 000 € en dos productes d'inversió diferents: accions i bons. El client vol invertir almenys la mateixa quantitat en accions que en bons. A més, vol invertir entre 2 000 € i 8 000 € en bons; i entre 4 000 € i 6 000 € en accions. L'interès previst per a les accions és d'un 6% anual, mentre que per als bons és d'un 2% anual.

a) Planteja la maximització de l'interès previst per les inversions com un problema de programació lineal.

Criteris: 2 pt per plantejar rectes (penalització amb -0.5 pt/recta incorrecta), 1 pt per indicar la funció objectiu. Penalització amb tota la puntuació si les variables són incorrectes.
(Total 3 pt)

b) Dibuixa la regió factible, indicant les rectes i vèrtexs que la delimiten.

Criteris: 3 pt per traçar rectes no trivials (penalització amb -1 pt/recta traçada incorrectament), 2 pt per calcular vèrtexs (penalització amb -0.5 pt/vèrtex incorrecte). Penalització amb -2.5 pt si la regió factible no està dibuixada o és incorrecta. Penalització amb -0.25 pt per cada recta no identificada a la regió factible (com a màxim penalitzar -1 pt).
(Total 5 pt)

c) Quina hauria de ser la inversió en cada tipus de producte per maximitzar l'interès anual previst? Quants de doblers es generarien amb aquesta inversió?

Criteris: 1 pt per calcular correctament el vèrtex corresponent al màxim i 1 pt per interpretar-lo.
(Total 2 pt)



P3. — Considera la funció $f(x) = \sqrt{x}$.

- a) Fes una gràfica esquemàtica de la funció $f(x)$ i indica'n el domini, el comportament en els extrems del domini, els intervals de creixement i decreixement, i els màxims i mínims locals.

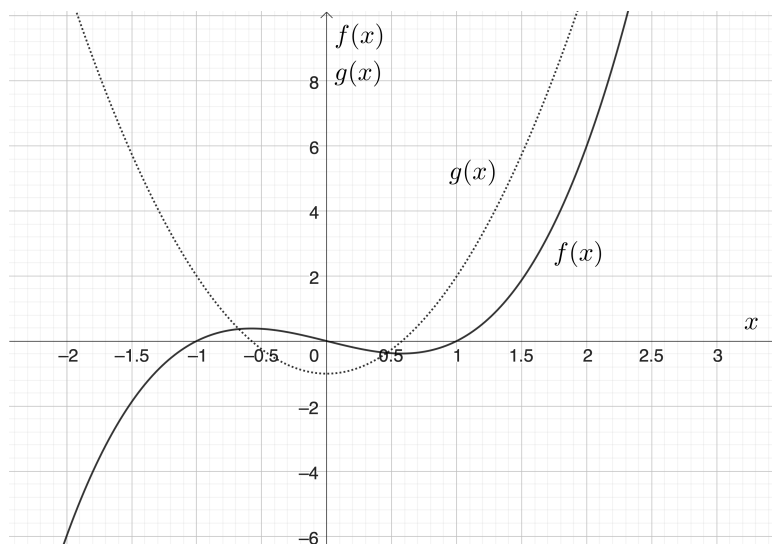
Indicació: per facilitar l'apartat b), l'eix horitzontal hauria d'arribar fins a $x = 30$.

Criteris: 1 pt per indicar el domini. 2 pt per calcular els valors en els extrems del domini (1 pt/extrem). 1 pt per calcular els intervals de creixement/decreixement. 1 pt per calcular els màxims/mínims locals. 2 pts per la claredat/correcció de la gràfica i els eixos. No penalitzar si no es considera $x = 0$ un mínim local. **(Total 7 pt)**

- b) Traça, sobre la gràfica, la recta tangent a $f(x)$ al punt $x = 25$ i indica'n el pendent.

Criteris: 2 pts pel càcul del pendent, 1 pt per la representació gràfica. **(Total 3 pt)**

P4. — Considera dues funcions, $f(x)$ i $g(x)$, que estan representades a la gràfica següent:



- a) Sabem que una de les funcions és $x(x-1)(x+1)$ i que l'altra és $(x-1/\sqrt{3})(x+1/\sqrt{3})$, però no sabem quina és quina. Dedueix, partint de la gràfica, quina és $f(x)$ i quina és $g(x)$. Justifica la resposta.

Criteris: Penalitzar amb tota la puntuació si el raonament és incorrecte. **(Total 3 pt)**

- b) Sabem que una d'elles és la derivada de l'altra. Digueu quina és quina: és $f(x) = g'(x)$? o bé és $g(x) = f'(x)$?

Criteris: Si es calcula alguna derivada, penalització amb -1.5 pt per error de càlcul en la derivada, i no penalitzar si el resultat és incorrecte. Penalitzar amb tota la puntuació si el raonament és incorrecte. **(Total 3 pt)**

- c) Calcula l'àrea entre la funció $g(x)$ i l'eix d'abscisses, que es troba compresa entre els punts en què $g(x) = 0$.

Criteris: 1 pt per justificar, 1 pt pels extrems, 1 pt per especificar quina és la primitiva, 1 pt per aplicar la regla de Barrow. No penalitzar si s'utilitza una primitiva incorrecta de l'apartat anterior. **(Total 4 pt)**

P5. — Segons un model, la població d'una determinada ciutat, p (en milions d'habitants), depèn del temps que ha passat, t (en anys), des del començament de l'any 2000, segons la relació

$$p(t) = \frac{4}{1 + 3 \cdot e^{-0.2t}}, \quad \text{per a } t \geq 0.$$

Et proporcionam la següent informació, que pots utilitzar si ho consideres oportú:

$$p'(t) = \frac{2.4 \cdot e^{-0.2t}}{(1 + 3 \cdot e^{-0.2t})^2}, \quad \int p(t) dt = 20 \cdot \ln(e^{0.2t} + 3) + C, \quad \text{per a qualsevol constant } C \in \mathbb{R}.$$

- a) Quina població teníem al començament de l'any 2000 (és a dir, per a $t = 0$)? Quin any varem tenir exactament 2 milions d'habitants?

Criteris: 1 pt per calcular $p(t = 0)$, 2 pts per calcular $t(p = 2)$. **(Total 3 pt)**

- b) En quins intervals la població augmenta? En quins disminueix? **(Total 3 pt)**

- c) A què tendeix la població de la ciutat a llarg termini? A què tendeix el ritme de creixement de la població a llarg termini?

Criteris: 2 pts per cada càlcul. Penalització amb -0.5 pts per cada omisió d'unitats. Penalització amb -1 pt si no s'utilitza que el ritme de creixement és la derivada de la funció. **(Total 4 pt)**

P6. — En una població,

- el 50% d'habitants amb major poder adquisitiu tenen una probabilitat de viure de lloguer d'un 10%, i
- el 50% d'habitants amb menor poder adquisitiu tenen una probabilitat de viure de lloguer d'un 40%.

- a) Quina és la probabilitat que, escollint un habitant a l'atzar, aquest visqui de lloguer? **(Total 4 pt)**

- b) Quina és la probabilitat que, escollint de manera independent tres habitants a l'atzar, tots tres visquin de lloguer?

Criteris: No penalitzar si s'utilitzen resultats incorrectes d'apartats anteriors. **(Total 3 pt)**

- c) Quina és la probabilitat que, escollint de manera independent tres habitants a l'atzar, almenys un dels tres visqui de lloguer?

Criteris: No penalitzar si s'utilitzen resultats incorrectes d'apartats anteriors. **(Total 3 pt)**

P7. — La probabilitat que plogui un dia qualsevol és sempre la mateixa. Ara bé, si un dia qualsevol ha plogut, la probabilitat que plogui el dia següent és del 40%; i si un dia qualsevol no ha plogut, la probabilitat que plogui el dia següent és del 5%.

Considera els esdeveniments següents:

- A : Avui ha plogut.
- B : Demà plourà.

a) Calcula $P(A)$ i $P(B)$.

Criteris: 1 pt per indicar que $P(A) = P(B)$, 2 pt per plantejar una equació que relaciona $P(A)$ amb $P(B)$, 2 pt per calcular-les. **(Total 5 pt)**

b) Què és més probable: que plogui demà si sabem que ha plogut avui; o bé que plogui avui si sabem que demà segur que plourà?

Criteris: 2 pt per plantejar, 3 pt per argumentar correctament. No penalitzar si utilitzen valors incorrectes de $P(A)$, $P(B)$, incloent $P(A) = P(B) = 0.5$. **(Total 5 pt)**

P8. — Segons l'Institut Nacional d'Estadística (INE), l'esperança de vida d'una persona nascuda el 2020 és de 79.6 anys per als homes i de 83.6 anys per a les dones. Suposem també que el nombre d'anys que viurà una persona nascuda el 2020 té una desviació típica de $\sigma = 10$ anys tant per als homes com per a les dones.

a) Quina és la probabilitat que un home nascut el 2020 visqui més de 60 anys? I que visqui entre 60 i 70 anys?

Criteris: Penalització amb -1 pt si no indiquen la distribució. Penalitzar -0.5 pt per error d'escriptura (com a màxim penalitzar -2 pt). **(Total 6 pt)**

b) Què és més probable: que un home nascut el 2020 visqui més de 89.6 anys; o que una dona nascuda el 2020 visqui més de 93.6 anys?

Criteris: Si es calcula, 2 pt per cada càlcul. No penalitzar si no s'indica quina distribució segueix la variable. **(Total 4 pt)**

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $\mathcal{N}(0,1)$.

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les vuit proposades. Justificau les respostes usant llenguatge matemàtic i/o no matemàtic, segons correspongui. Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4.

Es permet utilitzar calculadora científica bàsica. No es permet l'ús de calculadores gràfiques ni programables, ni de dispositius que puguin transmetre o emmagatzemar informació.

P1. — Una empresa està considerant la fabricació de tres tipus d'armaris diferents, A , B i C . Disposa de metall i fusta.

- Per fabricar cada unitat del model A , es requereixen 5 kg de metall i 5 hores de treball d'un operari (no es requereix fusta).
- Per unitat del model B , 10 kg de metall, 10 kg de fusta i 10 hores de treball.
- Per unitat del model C , 15 kg de metall i 5 hores de treball (no es requereix fusta).

a) Si volem produir 10 unitats de cada tipus, quants de kg de cada material necessitam? **(2 pt)**

Solució. Considerem la matriu que, per cada tipus d'armari (columnes), ens indica la quantitat de cada material (fileres):

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 0 & 15 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si volem fabricar 10 unitats de cada tipus,

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 0 & 15 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 100 \end{pmatrix},$$

és a dir, necessitam 300 kg de metall i 100 kg de fusta.

b) Si disposam de 1550 kg de metall, 600 kg de fusta i 1050 hores de treball d'operaris, quantes unitats de cada tipus hem de fabricar per utilitzar completament tots els recursos? **(4 pt)**

Solució. Considerem la matriu de l'apartat anterior, en què afegim la quantitat d'hores d'operaris:

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 0 & 10 & 0 \\ 5 & 10 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ens demanen trobar la quantitat d'unitats de cada tipus que haurem de produir:

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 0 & 10 & 0 \\ 5 & 10 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1550 \\ 600 \\ 1050 \end{pmatrix}.$$

Pel mètode de Gauss,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

És a dir, hem de fabricar 40 unitats de l'armari A , 60 unitats de l'armari B , i 50 unitats de l'armari C .

- c) Suposem ara que disposem de 1550 kg de metall, tota la fusta que necessitam (sense límit) i 1050 hores de treball, però per limitacions del magatzem només podem produir 125 unitats en total. En aquest cas, podem utilitzar completament el metall, les hores i el magatzem? **(4 pt)**

Solució. De manera similar a l'apartat anterior, volem resoldre:

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 5 & 10 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1550 \\ 1050 \\ 125 \end{pmatrix}.$$

Pel mètode de Gauss,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 85 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

És a dir, hem de fabricar -10 unitats de l'armari A , 85 unitats de l'armari B , i 50 unitats de l'armari C . La resposta a la pregunta és negativa: no, l'única combinació en què utilitzam tots els recursos mencionats correspon a una quantitat negativa d'armaris A , que, per tant, no és realitzable.

P2. — Un client ens demana ajuda per invertir un màxim de 10 000 € en dos productes d'inversió diferents: accions i bons. El client vol invertir almenys la mateixa quantitat en accions que en bons. A més, vol invertir entre 2 000 € i 8 000 € en bons; i entre 4 000 € i 6 000 € en accions.

L'interès previst per a les accions és d'un 6% anual, mentre que per als bons és d'un 2% anual.

- a) Planteja la maximització de l'interès previst per les inversions com un problema de programació lineal. **(3 pt)**

Solució. Sigui a els doblers invertits en accions (en milers d' €), i b els doblers invertits en bons (en milers d' €). Aleshores, volem maximitzar $f(a, b) = 1000a \cdot 0.06 + 1000b \cdot 0.02$, amb les restriccions següents:

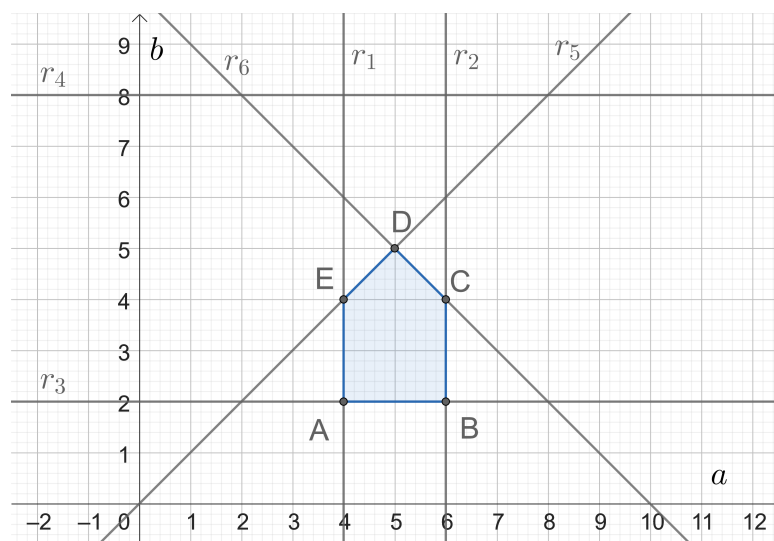
$$\left. \begin{array}{l} a \geq 4 \\ a \leq 6 \\ b \geq 2 \\ b \leq 8 \\ a \geq b \\ a + b \leq 10 \end{array} \right\}$$

Les rectes que delimiten la regió factible són:

- r_1 : $a = 4$, que és paral·lela a l'eix vertical.
- r_1 : $a = 6$, que és paral·lela a l'eix vertical.
- r_2 : $b = 2$, que és paral·lela a l'eix horitzontal.
- r_2 : $b = 8$, que és paral·lela a l'eix horitzontal.

- r_3 : $a = b$, que passa pels punts $(a = 0, b = 0)$ i $(a = 5, b = 5)$.
- r_4 : $a + b = 10$, que passa pels punts $(a = 10, b = 0)$ i $(a = 0, b = 10)$.

Amb aquestes i els signes de les inequacions, la regió factible és:



- b) Dibuixa la regió factible, indicant les rectes i vèrtexs que la delimiten. (5 pt)

Solució. Traçant les rectes, observam que els vèrtexs que delimiten la regió factible són:

- A (r_1 i r_3), que és el punt $(4, 2)$.
- B (r_3 i r_2), que és el punt $(6, 2)$.
- C (r_2 i r_6), que és el punt $(6, 4)$.
- D (r_6 i r_5), que és el punt $(5, 5)$.
- D (r_5 i r_1), que és el punt $(4, 4)$.

- c) Quina hauria de ser la inversió en cada tipus de producte per maximitzar l'interès anual previst?
Quants de doblers es generarien amb aquesta inversió? (2 pt)

Solució. La funció és màxima al vèrtex C , amb $f(6, 4) = 360 + 80 = 440$, que es correspon a invertir 6 000 € en accions i 4 000 € en bons, i que genera 440 € per any.

P3. — Considera la funció $f(x) = \sqrt{x}$.

- a) Fes una gràfica esquemàtica de la funció $f(x)$ i indica'n el domini, el comportament en els extrems del domini, els intervals de creixement i decreixement, i els màxims i mínims locals.

Indicació: per facilitar l'apartat b), l'eix horitzontal hauria d'arribar fins a $x = 30$. (7 pt)

Solució. El domini és $x \in [0, +\infty)$. En els extrems del domini,

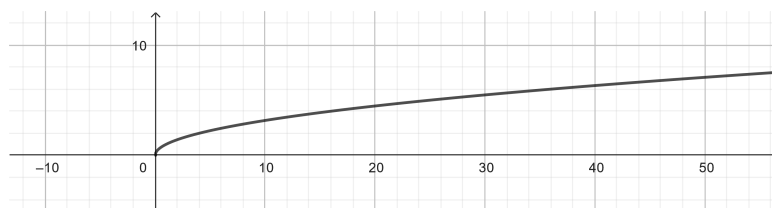
$$f(x = 0) = \sqrt{0} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty.$$

Per al creixement, sabem que la funció arrel quadrada és sempre creixent. Alternativament, podem calcular-ne la derivada:

$$f'(x) = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

que observam que és sempre positiva. Atès que la funció és sempre creixent, té un mínim absolut a $x = 0$, que per tant és mínim local; tendeix a infinit per a $x \rightarrow +\infty$; i no té altres extrems relatius.

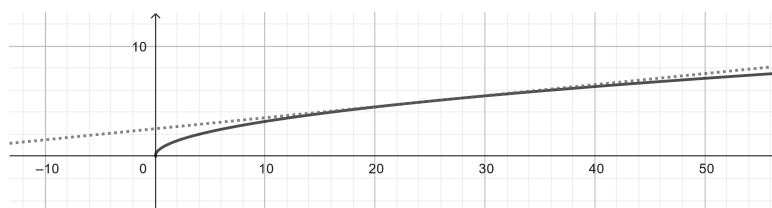
La representació gràfica és:



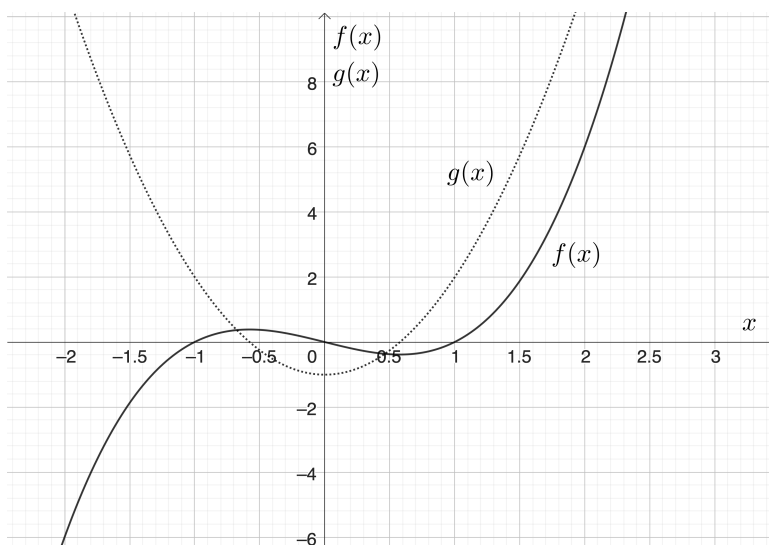
- b) Traça, sobre la gràfica, la recta tangent a $f(x)$ al punt $x = 25$ i indica'n el pendent. **(3 pt)**

Solució. Aquesta recta passa pel punt $x = 25$, $y = f(25) = \sqrt{25} = 5$. A més, el seu pendent és de $f'(25) = \frac{1}{2\sqrt{25}} = \frac{1}{10}$.

La representació gràfica és la següent:



P4. — Considera dues funcions, $f(x)$ i $g(x)$, que estan representades a la gràfica següent:



- a) Sabem que una de les funcions és $x(x-1)(x+1)$ i que l'altra és $(x-1/\sqrt{3})(x+1/\sqrt{3})$, però no sabem quina és quina. Dedueix, partint de la gràfica, quina és $f(x)$ i quina és $g(x)$. Justifica la resposta. **(3 pt)**

Solució. El primer polinomi s'anul·la a $x = 0$, $x = 1$ i $x = -1$ i, per tant, $f(x) = x(x-1)(x+1)$. Podríem argumentar-ho també sobre la base del comportament en els extrems, d'avaluar la funció en diversos punts, argumentar que $f(x)$ no pot ser la paràbola $(x-1/\sqrt{3})(x+1/\sqrt{3})$, etc.

- b) Sabem que una d'elles és la derivada de l'altra. Digues quina és quina: és $f(x) = g'(x)$? o bé és $g(x) = f'(x)$? **(3 pt)**

Solució. Ho podem justificar partint de la gràfica, o de l'expressió algebraica de l'apartat anterior.

Partint de l'expressió algebraica és més directe: $f(x)$ és un polinomi de grau 3, i $g(x)$ és un polinomi de grau 2, així que $g'(x) \neq f(x)$. Calculant la derivada explícitament hi ha una discrepància d'un factor 3 que hauria de multiplicar a la segona funció.

Alternativament, vege-m'ho partint de la gràfica: sabem que una funció és creixent quan la seva derivada és positiva, i decreixent quan la seva derivada és negativa. Observam primer que quan $f(x)$ creix, aleshores $g(x)$ és positiva; i quan $f(x)$ decreix, $g(x)$ és negativa. Per tant, la derivada de $f(x)$ podria ser $g(x)$. Al revés, observam que en l'interval $x \in [-2, 0]$, $g(x)$ és decreixent, però $f(x)$ canvia de signe. Això ens indica que la derivada de $g(x)$ no és $f(x)$, és a dir, $g'(x) \neq f(x)$. Sabent que una de les dues és la derivada de l'altra, i que $g'(x) \neq f(x)$, aleshores $f'(x) = g(x)$.

- c) Calcula l'àrea entre la funció $g(x)$ i l'eix d'abscisses, que es troba compresa entre els punts en què $g(x) = 0$. **(4 pt)**

Solució. L'eix d'abscisses és la recta $y = 0$, que en aquest interval és major que la funció donada. Observam també que $(x-1/\sqrt{3})(x+1/\sqrt{3}) = 0$ quan algun dels dos termes s'anul·la, és a dir, quan $x = 1/\sqrt{3}$ o bé quan $x = -1/\sqrt{3}$. Per tant,

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} -g(x) dx = \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} -x^2 + \frac{1}{3} dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}x \right]_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \\ &= \left(-\frac{1}{9\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} \right) - \left(+\frac{1}{9\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \right) = \frac{4}{9\sqrt{3}} = 0.257. \end{aligned}$$

P5. — Segons un model, la població d'una determinada ciutat, p (en milions d'habitants), depèn del temps que ha passat, t (en anys), des del començament de l'any 2000, segons la relació

$$p(t) = \frac{4}{1 + 3 \cdot e^{-0.2t}}, \quad \text{per a } t \geq 0.$$

Et proporcionam la següent informació, que pots utilitzar si ho consideres oportú:

$$p'(t) = \frac{2.4 \cdot e^{-0.2t}}{(1 + 3 \cdot e^{-0.2t})^2}, \quad \int p(t) dt = 20 \cdot \ln(e^{0.2t} + 3) + C, \quad \text{per a qualsevol constant } C \in \mathbb{R}.$$

- a) Quina població teníem al començament de l'any 2000 (és a dir, per a $t = 0$)? Quin any varem tenir exactament 2 milions d'habitants? **(3 pt)**

Solució. L'any 2000, tenim $p(t = 0) = \frac{4}{1+3 \cdot e^{-0.2 \cdot 0}} = \frac{4}{1+3} = 1$ milió d'habitants.

La població és de 2 milions d'habitants en l'instant t tal que

$$\begin{aligned} p(t) = 2 &\implies \frac{4}{1+3 \cdot e^{-0.2t}} = 2 \implies 2 = 1 + 3 \cdot e^{-0.2t} \implies e^{-0.2t} = \frac{1}{3} \\ &\implies -0.2t = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \implies t = 5.49. \end{aligned}$$

És a dir, hauríem tingut 2 milions d'habitants en algun moment de l'any 2005 (entre el començament de l'any 2005 i el començament de l'any 2006).

- b) En quins intervals la població augmenta? En quins disminueix? **(3 pt)**

Solució. La quantitat d'habitants augmenta quan la derivada d'aquesta funció és positiva. Ja sabem que

$$p'(t) = \frac{2.4e^{-0.2t}}{(1 + 3 \cdot e^{-0.2t})^2},$$

i, d'aquesta expressió, observam que tant el numerador com el denominador són sempre positius. Per tant, $p'(t) > 0$ per a tot $t \in [0, +\infty)$, i per tant la quantitat d'habitants sempre augmenta.

- c) A què tendeix la població de la ciutat a llarg termini? A què tendeix el ritme de creixement de la població a llarg termini? **(4 pt)**

Solució. Per a la primera pregunta,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{4}{1 + 3 \cdot e^{-0.2t}} = \frac{4}{1 + 3 \cdot e^{-\infty}} = \frac{4}{1 + 3 \cdot 0} = 4 \text{ milions.}$$

Per a la segona pregunta, ens demanen com **canvia** $p(t)$ a llarg termini. Si $p(t)$ s'estabilitza en un valor concret, necessàriament el ritme de creixement tendirà a zero. Ho podem comprovar amb la derivada:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} p'(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2.4e^{-0.2t}}{(1 + 3 \cdot e^{-0.2t})^2} = \frac{2.4e^{-\infty}}{(1 + 3 \cdot e^{-\infty})^2} = \frac{0}{(1 + 0)^2} = 0 \text{ milions/any.}$$

P6. — En una població,

- el 50% d'habitants amb major poder adquisitiu tenen una probabilitat de viure de lloguer d'un 10%, i
- el 50% d'habitants amb menor poder adquisitiu tenen una probabilitat de viure de lloguer d'un 40%.

- a) Quina és la probabilitat que, escollint un habitant a l'atzar, aquest visqui de lloguer? (4 pt)

Solució. Considerem els esdeveniments A : l'habitant és en el 50% amb major poder adquisitiu; i L : l'habitant viu de lloguer.

D'acord amb l'enunciat, $P(A) = 50\%$, $P(L|A) = 10\%$ i $P(L|A^c) = 40\%$. Pel teorema de les probabilitats totals,

$$P(L) = P(L|A)P(A) + P(L|A^c)P(A^c) = 0.10 \cdot 0.50 + 0.40 \cdot 0.50 = 0.25 = 25\%,$$

és a dir, la probabilitat que l'habitant escollit a l'atzar visqui de lloguer és d'un 25%.

- b) Quina és la probabilitat que, escollint de manera independent tres habitants a l'atzar, tots tres visquin de lloguer? (3 pt)

Solució. Considerem els esdeveniments L_1 , L_2 , L_3 : que el primer/segon/tercer habitant escollit visqui de lloguer. Atès que són eleccions independents,

$$P(L_1 \cap L_2 \cap L_3) = P(L_1) \cdot P(L_2) \cdot P(L_3) = 0.25^3 = 0.0156,$$

és a dir, la probabilitat demanada és de l'1.56%.

- c) Quina és la probabilitat que, escollint de manera independent tres habitants a l'atzar, almenys un dels tres visqui de lloguer? (3 pt)

Solució. És més fàcil calcular la probabilitat del complementari: el contrari del fet que almenys un dels tres visqui de lloguer, és que cap d'ells visqui de lloguer:

$$1 - P(L_1 \cup L_2 \cup L_3) = P(L_1^c \cap L_2^c \cap L_3^c).$$

Pel primer apartat, $P(L_1^c) = P(L_2^c) = P(L_3^c) = 1 - P(L) = 0.75$. Com a l'apartat anterior,

$$P(L_1^c \cap L_2^c \cap L_3^c) = P(L_1^c) \cdot P(L_2^c) \cdot P(L_3^c) = 0.75^3 = 0.422,$$

i, finalment,

$$P(L_1 \cup L_2 \cup L_3) = 1 - P(L_1^c \cap L_2^c \cap L_3^c) = 0.578.$$

És a dir, la probabilitat demanada és de 0.578 o del 57.8%.

P7. — La probabilitat que plogui un dia qualsevol és sempre la mateixa. Ara bé, si un dia qualsevol ha plogut, la probabilitat que plogui el dia següent és del 40%; i si un dia qualsevol no ha plogut, la probabilitat que plogui el dia següent és del 5%.

Considera els esdeveniments següents:

- A : Avui ha plogut.
- B : Demà plourà.

- a) Calcula $P(A)$ i $P(B)$. (5 pt)

Solució. La primera frase de l'enunciat ens diu que $P(A) = P(B)$. La segona ens diu que $P(B|A) = 0.4$, i la tercera que $P(B|A^c) = 0.05$.

Pel teorema de les probabilitats totals,

$$P(B) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A^c) \cdot P(A^c),$$

on, recordem, $P(B|A) = 0.4$ i $P(B|A^c) = 0.05$

Ara bé, $P(A) = P(B)$ i $P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - P(B)$, d'on obtenim

$$P(B) = 0.4 \cdot P(B) + 0.05 \cdot (1 - P(B)) \implies 0.65P(B) = 0.05 \implies P(B) = 7.69\%.$$

- b) Què és més probable: que plogui demà si sabem que ha plogut avui; o bé que plogui avui si sabem que demà segur que plourà? (5 pt)

Solució. Ens demanen comparar $P(A|B)$ i $P(B|A)$, que són iguals perquè $P(A) = P(B)$ i el teorema de Bayes ens assegura que:

$$P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)} P(B|A).$$

P8. — Segons l'Institut Nacional d'Estadística (INE), l'esperança de vida d'una persona nascuda el 2020 és de 79.6 anys per als homes i de 83.6 anys per a les dones. Suposem també que el nombre d'anys que viurà una persona nascuda el 2020 té una desviació típica de $\sigma = 10$ anys tant per als homes com per a les dones.

- a) Quina és la probabilitat que un home nascut el 2020 visqui més de 60 anys? I que visqui entre 60 i 70 anys? (6 pt)

Solució. Sigui X la variable aleatòria que mesura l'esperança de vida d'un home nascut el 2020. Considerarem que $X \sim \mathcal{N}(79.6, 10)$, i per tant la variable aleatòria $Z = \frac{X-79.6}{10}$ segueix una distribució $\mathcal{N}(0, 1)$. Per tant,

$$P(X \geq 60) = P\left(\frac{X - 79.6}{10} \geq \frac{60 - 79.6}{10}\right) = P(Z \geq -1.96) = P(Z \leq 1.96) = 0.9750 = 97.50\%.$$

És a dir, la probabilitat demanada és de 0.975 o del 97.5%.

Amb la mateixa notació,

$$\begin{aligned} P(X \leq 70) &= P\left(\frac{X-79.6}{10} \leq \frac{70-79.6}{10}\right) = P(Z \leq -0.96) \\ &= 1 - P(Z \leq 0.96) = 1 - 0.8315 = 0.1685 = 16.85\%, \end{aligned}$$

i, per tant, la probabilitat demanada és

$$\begin{aligned} P(60 \leq X \leq 70) &= P(X \leq 70) - P(X \leq 60) \\ &= P(X \leq 70) - (1 - P(X \geq 60)) = 0.1435 = 14.35\%. \end{aligned}$$

- b) Què és més probable: que un home nascut el 2020 visqui més de 89.6 anys; o que una dona nascuda el 2020 visqui més de 93.6 anys? **(4 pt)**

Solució. Afegint-ho a la notació de l'apartat anterior, considerem Y la variable aleatòria que mesura l'esperança de vida d'una dona nascuda el 2020, i sigui $Z' = \frac{Y-83.6}{10}$ que segueix una distribució $\mathcal{N}(0,1)$. Ens demanen comparar $P(X \geq 89.6)$ amb $P(Y \geq 93.6)$.

Observem que:

$$\begin{cases} P(X \geq 89,6) = P\left(\frac{X-79,6}{10} \geq \frac{89,6-79,6}{10}\right) = P(Z \geq 1), \\ P(Y \geq 93,6) = P\left(\frac{Y-83,6}{10} \geq \frac{93,6-83,6}{10}\right) = P(Z' \geq 1). \end{cases}$$

És a dir, sigui quina sigui aquesta probabilitat, serà la mateixa en ambdós casos.



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $\mathcal{N}(0,1)$.